

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ЗАМЕЧАТЕЛЬНОГО ПРЕДЕЛА

Матвійчук С.В., студент; СумДУ, гр. ІН-01

Один из первый результатов в изучении свойств числа e был получен, Дж. Ламбертом, который доказал иррациональность числа e . С. Эрмит доказал трансцендентность числа e , т.е., что число e не является корнем никакого полинома с целыми коэффициентами. Дж. Лиувиль и С. Бетти показали, что e^2 не является корнем никакого полинома второй степени.

Теорема 1 (Ламберт). Число e является иррациональным.

Теорема 2. Число e является квадратично-иррациональным.

Теорема 3. число e^2 является квадратично-иррациональным, т.е. не существует полинома $P(x) = ax^4 + bx^2 + c$, где $a, b, c \in \mathbf{Z}$, $a \neq 0$, такого что, $P(e) = 0$.

Рассмотри теперь более общую теорему.

Теорема 4 (Эрмит). Число e является трансцендентным, т.е. не является корнем никакого полинома с целыми коэффициентами.

Доказательство. Приведем только поэтапную схему доказательства.

1) Пусть $P(x)$ – произвольный полином степени n . Определим функцию $I(t)$ равенством:

$$I(t) = \int_0^t e^{t-u} f(u) du.$$

Пусть $P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$. Определим

$$P^*(x) = |a_0| + |a_1|x + \dots + |a_n|x^n.$$

Можно показать, что

$$|I(t)| \leq |t| P^*(|t|) e^{|t|}.$$

2) Предположим, что $G(x) = b_0 + b_1x + \dots + b_r x^r$ – полином с целыми коэффициентами и $b_0 \neq 0$, такой, что $G(e) = 0$. Определим

$$P(x) = x^{p-1}(x-1)^p(x-2)^p \dots (x-r)^p,$$

и рассмотрим выражение

$$J = b_0 I(0) + b_1 I(1) + \dots + b_r I(r),$$

где $I(t)$ определяется с помощью полинома P по правилу, рассмотренному в пункте 1). Заметим что степень p равна $n = (r+1)p - 1$. Тогда

$$\begin{aligned} J &= \sum_{k=0}^r b_k I(k) = \sum_{k=0}^r b_k \left(e^k \sum_{j=0}^n P^{(j)}(0) - \sum_{j=0}^n P^{(j)}(k) \right) \\ &= \left(\sum_{j=0}^n P^{(j)}(0) \right) g(e) - \sum_{k=0}^r \sum_{j=0}^n b_k P^{(j)}(k) = - \sum_{k=0}^r \sum_{j=0}^n b_k P^{(j)}(k). \end{aligned}$$

Полином P имеет корень порядка $p-1$ в точке $x=0$, следовательно, $P^{(j)}(0)=0$, для $0 \leq j \leq p-2$. Аналогично, $P^{(j)}(k)=0$, для $0 \leq j \leq p-1$, отсюда получаем

$$J = -b_0 P^{(p-1)}(0) - b_0 \sum_{j=p}^n P^{(j)}(0) + \sum_{k=1}^r b_k \sum_{j=p}^n P^{(j)}(k).$$

3) Каждый член, за исключением первого, в последнем равенстве делится на $p!$. Первый член делится на $(p-1)!$.

4) Число J делится на $(p-1)!$ и $J \neq 0$, так как не делится на $p!$.

Следовательно, $|J| \geq (p-1)!$. Отсюда получаем

$$|J| = \sum_{k=0}^r |b_k| k P^*(k) e^k.$$

Отсюда получаем: $|J| \leq c a^p$, где $a = (2r)^{r+1}$, а c – постоянная, независимая от p . Последнее неравенство невозможно для больших p .

Руководитель: Малютин К.Г., профессор